

文章编号: 2096-3424(2024)03-0347-06

DOI: 10.3969/j.issn.2096-3424.2022.084

# 超临界流速下两端固定输流管道横向非线性受迫振动

谭霞

(上海应用技术大学 机械工程学院, 上海 201418)

**摘要:** 研究横向谐波激励作用下两端固定输流管道在超临界流速下的非线性受迫振动, 采用 Euler-Bernoulli 梁理论, 运用广义哈密顿原理建立输流管道横向受迫振动控制方程。推导两端固定输流管道的屈曲静平衡位形和临界流速。通过有限差分法数值仿真得到输流管道在超临界流速下的全局稳态幅频响应。通过分析全局稳态振动响应, 验证屈曲静平衡位形的正确性。此外, 系统参数对超临界输流管道受迫振动稳态响应的影响表明非线性系数和刚度系数会显著影响输流管道的超临界振动平衡位置; 管流质量比的减小会使共振频率增大。

**关键词:** 输流管道; 超临界; 受迫振动; 有限差分法

**中图分类号:** O322 **文献标志码:** A

## Transverse nonlinear forced vibration of pipe conveying supercritical fluid with both fixed ends

TAN Xia

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

**Abstract:** Transverse nonlinear forced vibration of a pipe with both fixed ends conveying high velocity fluid are studied. Applying Euler-Bernoulli beam theory, the governing equation of motion of the pipe conveying fluid subjected to harmonic excitation is established by using generalized Hamilton's principle. The non-trivial static equilibrium configuration and critical velocity of the pipe conveying fluid are derived. By analyzing the global steady-state vibration response, the correctness of the non-trivial static equilibrium configuration and is verified. In addition, the influence of system parameters on the steady-state vibration response in the supercritical regime are presented. The results show that the nonlinear coefficient and stiffness coefficient can significantly affect the equilibrium position of vibration in the supercritical regime. The resonance frequency increases when the mass ratio of pipe flow decreases.

**Key words:** pipe conveying fluid; supercritical; forced vibration; finite difference method

收稿日期: 2022-11-23

基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (12102266); 上海应用技术大学引进人才项目 (YJ2021-42) 资助

作者简介: 谭霞 (1992-), 女, 讲师, 博士, 主要研究方向为高速轴向运动连续体非线性动力学。E-mail: xia\_t0108@sit.edu.cn

引文格式: 谭霞. 超临界流速下两端固定输流管道横向非线性受迫振动 [J]. 应用技术学报, 2024, 24(3): 347-352.

**Citation:** TAN Xia. Transverse nonlinear forced vibration of pipe conveying supercritical fluid with both fixed ends[J]. Journal of Technology, 2024, 24(3): 347-352.



输流管道被广泛应用于各个领域,如飞机或汽车中的燃油和排气管道、民生中的输油供水管道、海洋中的立管以及核工业中的冷热交换管道等等<sup>[1-3]</sup>。流体的流动或管道所受外部载荷往往会引起系统发生振动,当振动过大甚至发生共振时,往往会导致严重后果甚至灾难性事故。因此,各种输流管道的振动特性研究,一直是学者和工程师们的关注点<sup>[4-5]</sup>。输流管道内流体流速较低时,管道在零平衡位形附近振动,针对亚临界流速下管道的振动特性,学者们做了大量工作,取得了显著成果<sup>[6-7]</sup>。当流速超过临界值,管道将重新稳定在屈曲平衡位形附近振动。早在 1974 年,Païdoussis 等<sup>[8]</sup>便研究了高流速下,简支、固定以及悬臂边界时管道的屈曲和颤振。Zhang 等<sup>[9-13]</sup>运用数值 Galerkin 截断法和近似解析多尺度法系统研究了超临界流流速,简支边界下 Euler-Bernoulli 输流管道的非线性振动特性。Tan 等<sup>[14-15]</sup>运用有限差分法研究了 Timoshenko 输流管道径向、横向和截面转动三者耦合的非线性振动特性,确定了超临界流速下, Timoshenko 与 Euler-Bernoulli 管道模型非线性振动特性的差异。Dai 等<sup>[16]</sup>研究了铰接输液管道的涡激振动,发现系统会出现反倍周期分岔和混沌运动等动力学行为。朱竑祯等<sup>[17]</sup>运用谱单元法分析了 Timoshenko 输流管道的三维动力学特性,分析了系统参数以及支撑边界对振动稳定性的影响。对比低流速下输流管道的动力学行为,超临界流速下输流管道的振动行为表现显著不同。

本文运用有限差分法,对两端固定输流管道进行直接离散,研究其在超临界流速下的受迫振动特性。确定管道的临界流速以及屈曲静平衡位形,分析系统参数对受迫振动特性的影响。研究结果可丰富输流管道系统在超临界领域的非线性动力学理论

## 1 数学模型

图 1 所示为长度为  $L$ , 横截面外径为  $D$ , 内径为  $d$ , 密度为  $\rho_p$ , 初始轴力为  $P_0$  的两端固定约束的输流管道简图。假设管内以恒定的流速  $\Gamma$  流动着密度为  $\rho_f$  的不可压缩流体。管道在横向 ( $y$  方向) 简谐外激励以及流体的共同作用下发生横向非线性振动。

运用 Euler-Bernoulli 梁理论和广义哈密顿原理,建立输流管道的横向受迫非线性振动的无量纲控制方程<sup>[18]</sup>

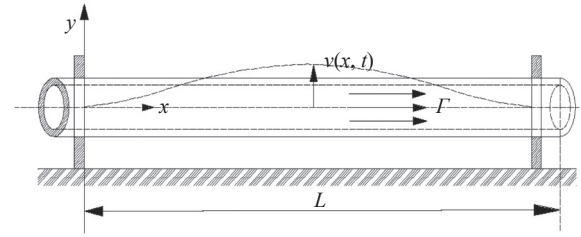


图 1 输流管道物理模型简图

Fig. 1 Schematic diagram of the physical model of the pipe conveying fluid

$$v_{,tt} + 2\gamma M_r v_{,xt} + c_0 v_{,t} + (\gamma^2 - k_f) v_{,xx} + v_{,xxx} - v_{,xx} \frac{k_n^2}{2} \int_0^1 v_{,x}^2 \sim dx = b \cos(\omega t) \quad (1)$$

相应的无量纲固定边界条件为:

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0, v(1, t) = 0, \\ v_{,x}(0, t) = 0, v_{,x}(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $v(x, t)$  为管道的横向振动位移; 位移  $v(x, t)$  下标逗号表示对变量求偏导。控制方程中的无量纲参数定义如下:

$$\begin{aligned} v \leftrightarrow \frac{v}{L}, x \leftrightarrow \frac{x}{L}, t \leftrightarrow \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI_p}{\rho_p A_p + \rho_f A_f}}, \\ \gamma = \tau L \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{EI_p}}, M_r = \sqrt{\frac{\rho_f A_f}{\rho_p A_p + \rho_f A_f}}, \\ c_0 = C_0 L \sqrt{\frac{\rho_p A_p + \rho_f A_f}{EI_p}}, k_q = \frac{(A_r P + P_Q) L^2}{EI_p}, \\ k_n = L \sqrt{\frac{A_p}{I_p}}, \omega = \Omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_p A_p + \rho_f A_f}{EI_p}}, b = \frac{BL^3}{EI_p} \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\gamma$  为无量纲流速;  $M_r$  为管道流体质量比的开方;  $c_0$  为无量纲外阻尼系数;  $k_n$  和  $k_f$  分别为非线性系数和刚度系数; 参数  $A_p$ 、 $A_f$  分别来自管道和流体的横截面面积;  $E$ 、 $G$  分别为弹性模量和剪切模量;  $I_p$  为管道截面惯性矩;  $C_0$  为外阻尼;  $B$  和  $\Omega$  为外激励振幅和外激励频率。

忽略非线性振动控制式 (1) 中与时间  $t$  相关项, 得到输流管道横向振动的静态控制方程以及静态固定边界条件:

$$(\gamma^2 - k_f) \hat{v}_{,xx} + \hat{v}_{,xxx} - \hat{v}_{,xx} \frac{k_n^2}{2} \int_0^1 \hat{v}_{,x}^2 \sim dx = 0 \quad (4)$$

$$\hat{v}(0) = \hat{v}(1) = 0, \hat{v}_{,x}(0) = \hat{v}_{,x}(1) = 0 \quad (5)$$

式中,  $\hat{v}$  表示管道内流速超过临界值时管道的屈曲静平衡位形。

运用常数变易法, 结合文献 [15] 中给出的简支边界条件下输流管道的第一阶非平凡静平衡位

形解析解, 得到两端固定 Euler-Bernoulli 输流管道的第一阶横向屈曲静平衡位形

$$\hat{v}(x) = \pm \frac{2}{k_n \pi} \sqrt{(\gamma^2 - k_f - 4\pi^2) \sin^2(\pi x)} \quad (6)$$

以及临界流速

$$\gamma_c = \sqrt{k_f + 4\pi^2} \quad (7)$$

## 2 有限差分法

为得到超临界输流管道横向受迫振动的稳态响应, 运用有限差分法对控制方程进行直接离散然后求解。首先对时间和空间进行网格划分:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad h = 1/N_1 \\ t_j &= t_0 + j\tau, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $h$  和  $\tau$  分别为空间和时间步长。初始节点  $(x_0, t_0)$  设为  $(0, 0)$ , 将  $(x_i, t_j)$  记为  $(i, j)$ 。根据泰勒公式展开得到差分公式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x} &= \frac{1}{2h} (\xi_{i+1}^j - \xi_{i-1}^j) + O(h^2) \\ \frac{\partial^2 \xi_i^j}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2} (\xi_{i+1}^j - 2\xi_i^j + \xi_{i-1}^j) + O(h^2) \\ \frac{\partial^4 \xi_i^j}{\partial x^4} &= \frac{1}{h^4} (\xi_{i+2}^j - 4\xi_{i+1}^j + 6\xi_i^j - 4\xi_{i-1}^j + \xi_{i-2}^j) + O(h^2) \\ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial t} &= \frac{1}{\tau} (\xi_i^j - \xi_i^{j-1}) + O(\tau) \\ \frac{\partial^2 \xi_i^j}{\partial t^2} &= \frac{1}{\tau^2} (\xi_i^{j+1} - 2\xi_i^j + \xi_i^{j-1}) + O(\tau^2) \\ \frac{\partial^2 \xi_i^j}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{2\tau h} (\xi_{i+1}^j - \xi_{i+1}^{j-1} - \xi_{i-1}^j + \xi_{i-1}^{j-1}) + O(h^2\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

$\xi_i^j$  表示任意函数值  $\xi(x_i, t_j)$ 。将上述差分格式代入式 (1) 对其直接离散, 得到

$$\begin{aligned} v_i^{j+1} &= 2v_i^j - v_i^{j-1} - \frac{M_i \tau \gamma}{h} \\ &\quad \left( v_{i+1}^j - v_{i+1}^{j-1} - v_{i-1}^j + v_{i-1}^{j-1} \right) - c_Q \tau \left( v_i^j - v_i^{j-1} \right) - \\ &\quad \frac{\tau^2}{h^4} \left( v_{i+2}^j - 4v_{i+1}^j + 6v_i^j - 4v_{i-1}^j + v_{i-2}^j \right) - \\ &\quad \frac{(\gamma^2 - k_\xi) \tau^2}{h^2} \left( v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j \right) + \\ &\quad \frac{k_n^2 \tau^2 \ln 1}{2h^2} \left( v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j \right) + b\tau^2 \cos(\omega j\tau) \\ \ln 1 &= \int_0^1 v_{3x}^2 \sim dx = \\ &\quad \frac{1}{8h} \left[ \left( v_{i+1}^j - v_{i-1}^j \right)_{x=0}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N_j-1} \left( v_{i+1}^j - v_{i-1}^j \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( v_{i+1}^j - v_{i-1}^j \right)_{x=1}^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

以及离散边界条件

$$v_0^f = 0, v_{N_1}^d = 0, v_1^f = v_{-1}^f, v_{N_1+1}^f = v_{N_1-1}^f \quad (11)$$

初始条件假设为

$$v_{ty}(x, 0) = 0 \quad (12)$$

假设满足边界条件的初始迭代函数为

$$v(x_F, 0) = A_0 \sin^2(\pi x_i) \quad (13)$$

时间步长和空间步长一般满足以下要求以保证迭代计算收敛<sup>[14]</sup>

$$\frac{\tau \gamma}{2h} \ll 1 \quad (14)$$

确定临界流速, 利用上述迭代过程, 便可计算固定边界约束下超临界输流管道横向受迫非线性振动的稳态响应。

## 3 稳态响应

本文算例中的输流管道材质选取为工程实际中常用的无规共聚聚丙烯材料 (polypropylene random, PPR) 材质, 管内流体为水。表 1 中给出输流管道和流体的相关物理参数。

表 1 输流管道的物理参数

Tab. 1 The physical parameters of the pipe conveying fluid	
物理量	数值
管道长度 $L/m$	0.3
管道外径 $D/m$	0.02
管道内径 $d/m$	0.018
弹性模量 $E/MPa$	896
管道初始张力 $P_0/N$	-100
管道密度 $\rho_p/(kg \cdot m^{-3})$	920
流体密度 $\rho_f/(kg \cdot m^{-3})$	1 000

根据表 1 中的参数, 计算出输流管道的临界流速  $\gamma_c$  为 6.06。取超临界流速  $\gamma$  为 6.5, 计算出该流速下屈曲静态位形如图 2 所示。从中可以确定, 管道中点处的屈曲静态位移约为 0.033 47。

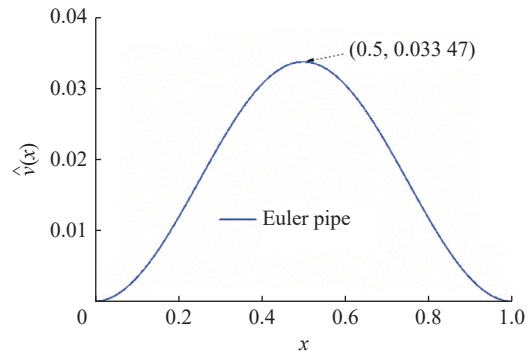


图 2 两端固定输流管道的屈曲静态位形  
Fig. 2 Static buckling configuration of pipe with both fixed ends

取  $\gamma=6.5$ 、时间步长  $\tau=2e^{-6}$ 、空间步长  $h=0.02$ 、 $A_0=0.001$ 、 $\omega=10$ 、 $b=0.001$ 、 $c_0=0.3$ 。通过式 (10)~式 (13) 的迭代计算, 得到如图 3 所示的超临界流速下两端固定约束 Euler-Bernoulli 输流管道的横向受迫振动稳态响应。图 3(a) 所示管道中点处

120 s 内的全局振动响应, 图 3(b) 为最后 5 s 的稳态响应。从中可以发现, 管道达到稳态后, 其振动是在一个非零的位形附近来回振动, 该非零位形值约为 0.033 71, 与图 2 中计算得到的解析值 0.033 47 极为接近, 从而验证了屈曲静平衡位形的正确性。

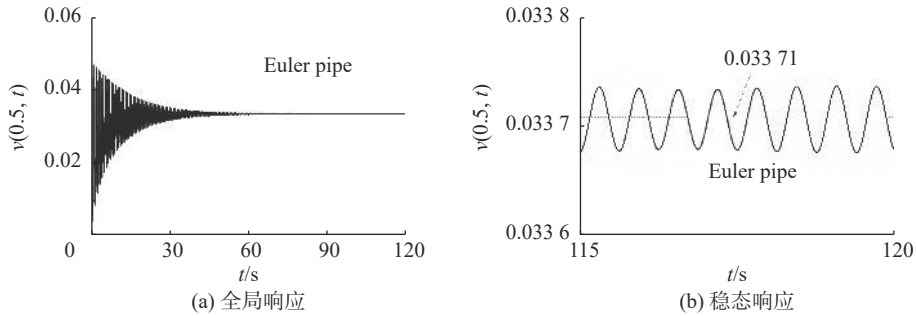


图 3 超临界横向受迫振动时域响应

Fig. 3 Time history of supercritical transverse forced vibration

### 4 参数分析

为进一步研究超临界流速下输流管道的振动

响应, 以  $\gamma=6.25$ ,  $b=0.001$ ,  $c_0=0.5$  以及表 1 中物理数值计算所得无量纲数值为基础值, 图 4 为不同参数下管道的稳态幅频响应。

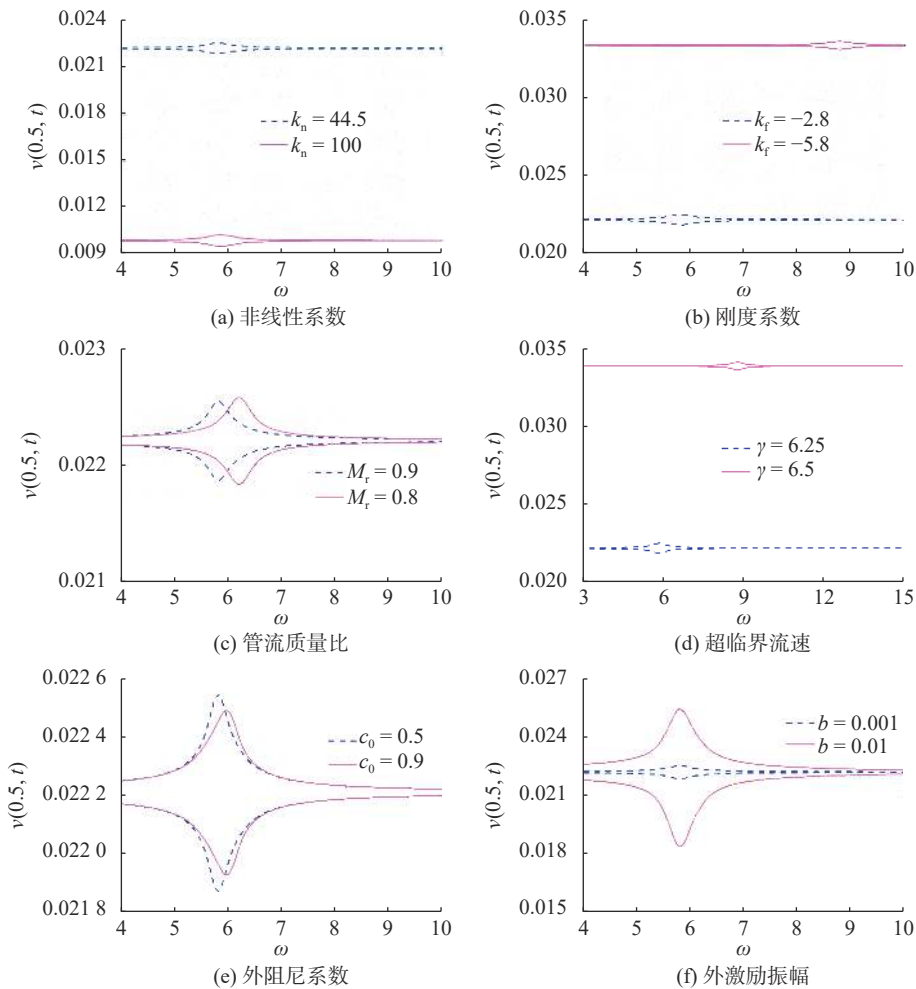


图 4 系统参数对超临界受迫振动稳态幅频响应的影响

Fig. 4 The influence of system parameters on the supercritical vibration steady-state amplitude frequency response

图4(a)所示为不同非线性系数对超临界流速下输流管道的稳态幅频响应的影响,可以发现,非线性系数的改变不会导致共振点改变,但是会显著影响屈曲静平衡位置,从而导致稳态响应振幅发生巨大改变。非线性系数越大,稳态振幅反而更小。图4(b)表明刚度系数的减小会导致共振频率变大,且导致管道振动的屈曲静平衡的位形增大。图4(c)表明管流质量比的变化不会改变屈曲静平衡的位置,但是会使管道的共振点发生偏移,小的管流质量比共振频率更大,且其最大共振幅值也更大。图4(d)展现了超临界流速对管道受迫振动稳态幅频响应的影响。更大的流速会导致更大的屈曲静平衡位形以及更大的共振频率。图4(e)和4(f)所示分别为外阻尼系数和外激励振幅对管道的稳态幅频响应的影响,两者都不会改变其共振频率以及屈曲静平衡位形,但小的外阻尼会引起大振幅共振,而小的外激励幅值会引起微小振幅共振。

## 5 结 语

考虑外阻尼影响,建立了两端固定输流管道横向受迫非线性振动的控制方程,推导出了输流管道的临界流速和屈曲平衡静态位形,并根据输流管道超临界流速下的稳态周期振动响应,验证了屈曲静态平衡位形的正确性。运用有限差分法得到了输流管道的超临界稳态周期振动的幅频响应曲线。

不同非线性系数对超临界流速下输流管道的稳态幅频响应的影响表明:管流质量比、外阻尼系数以及外激励振幅会改变共振振幅,但不会改变振动的屈曲静平衡位形;非线性系数、刚度系数和超临界流速会使管道在不同的屈曲静平衡位形附近振动,但非线性系数不会改变共振频率,刚度系数增大会使共振频率向小偏移而超临界流速的影响则与之相反。

### 参考文献:

- [ 1 ] LU H, HUANG K, WU S. Vibration and stress analyses of positive displacement pump pipeline systems in oil transportation stations[J]. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 2016, 7 ( 1 ) : 05015002.
- [ 2 ] CHATJIGEORGIU I K. On the effect of internal flow on vibrating catenary risers in three dimensions[J]. *Engineering Structures*, 2010, 32 ( 10 ) : 3313-3329.
- [ 3 ] GAO P X, YU T, ZHANG Y L, *et al.* Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: a review[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34 ( 4 ) : 83-114.
- [ 4 ] PAIDOUSSIS M P. Flow-induced instabilities of cylindrical structures[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1987, 40 ( 2 ) : 163-175.
- [ 5 ] IBRAHIM R A. Overview of mechanics of pipes conveying fluids, part I: fundamental studies[J]. *Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of the Asme*, 2010, 132 ( 3 ) : 1286019.
- [ 6 ] 黄玉盈, 钱勤, 徐鉴, 等. 输液管的非线性振动、分叉与混沌: 现状与展望 [J]. *力学进展*, 1998 ( 1 ) : 30-42.
- [ 7 ] 徐鉴, 杨前彪. 输液管模型及其非线性动力学近期研究进展 [J]. *力学进展*, 2004 ( 2 ) : 182-194.
- [ 8 ] PAIDOUSSIS M P, ISSID N. Dynamic stability of pipes conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1974, 33 ( 3 ) : 267-294.
- [ 9 ] ZHANG Y L, CHEN L Q. Internal resonance of pipes conveying fluid in the supercritical regime[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67 ( 2 ) : 1505-1514.
- [ 10 ] ZHANG Y L, CHEN L Q. External and internal resonances of the pipe conveying fluid in the supercritical regime[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332 ( 9 ) : 2318-2337.
- [ 11 ] CHEN L Q, ZHANG Y L, ZHANG G C, *et al.* Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014 ( 58 ) : 11-21.
- [ 12 ] ZHANG Y L, CHEN L Q. Steady-state response of pipes conveying pulsating fluid near a 2:1 internal resonance in the supercritical regime[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2014, 6 ( 5 ) : 1450056.
- [ 13 ] ZHANG Y, CHEN L. Nonlinear vibration of a pipe conveying fluid with weakly external excitation in the supercritical regime [J]. *Dynamics for Sustainable Engineering*, 2013, 332 ( 9 ) : 2318-2337
- [ 14 ] TAN X, DING H, CHEN L Q. Nonlinear frequencies and forced responses of pipes conveying fluid via a coupled Timoshenko model [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019 ( 455 ) : 241-255.
- [ 15 ] TAN X, MAO X Y, DING H, *et al.* Vibration around

- non-trivial equilibrium of a supercritical Timoshenko pipe conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018 (428) : 104-118.
- [16] DAI H L, WANG L, QIAN Q, *et al.* Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2013 (39) : 322-334.
- [17] 朱竑祯, 王伟波, 殷学文, 等. 基于谱单元法的船用输液管道振动建模与分析 [J]. *中国造船*, 2018, 59 (3) : 31-45.
- [18] TAN X, DING H. Parametric resonances of Timoshenko pipes conveying pulsating high-speed fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020 (485) : 115594.
- (编辑 张永博)

~~~~~

(上接第 324 页)

- [10] SUN J Q, QIU J L, HUANG D X. Multiwavelength erbium-doped fiber lasers exploiting polarization hole burning[J]. *Optics Communications*, 2000, 182 (1-3) : 193-197.
- [11] ZHOU K J, ZHOU D Y, DONG F Z, *et al.* Room-temperature multiwavelength erbium-doped fiber ring laser employing sinusoidal phase-modulation feedback[J]. *Optics Letters*, 2003, 28 (11) : 893-895.
- [12] ZHOU Y, ZHANG R L, CHEN P, *et al.* Passively Q-switched and mode-locked ytterbium fiber laser with Bi<sub>2</sub>S<sub>3</sub> nanowire[J]. *Laser Physics*, 2019, 29 (5) : 055101.
- [13] MAN W S, TAM H Y, DEMOKAN M S, *et al.* Mechanism of intrinsic wavelength tuning and sideband asymmetry in a passively mode-locked soliton fiber ring laser[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2000, 17 (1) : 28-33.
- (编辑 张永博)